

Vremenske serije

- Pojam
- Analiza trenda
- Sezonska i ciklična komponenta
- Indekсни brojevi

1

Pojam

Vremenske serije predstavljaju niz mjerenja jedne promjenljive kroz vrijeme. Analiza vremenskih serija nastoji da otkrije i razumije regularnost fluktuacija u vremenu.

Regularne promjene podataka vremenske serije mogu biti uzrok tendencije rasta ili pada kroz vrijeme - **trend** - ili tendencije praćenja nekog cikličnog pravila kroz vrijeme - **sezonska ili ciklična varijacija**.

Prognoza je ekstrapolacija vrijednosti serije van oblasti ocijenjenih podataka. Regularne varijacije vremenske serije mogu biti predmet prognoze, za razliku od slučajnih varijacija.

2

Indekсни brojevi

- **Indekсни broj** je broj koji mjeri *relativnu* promjenu serije u vremenu. Npr: the Dow Jones Industrial Average (DJIA), the Consumer Price Index (CPI), the New York Stock Exchange (NYSE) Index.
- Dijele se na:
 - Bazne indekse i
 - Lančane indekse
- Prosti i
- Složeni indeksi

3

Prosti indeksi

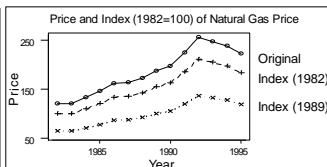
- Jedna promjenljiva
- Bazni indeks – odabere se bazna godina, i porede se nivoi date pojave sa nivoom u baznoj godini
- Y_0 – nivo pojave u baznom periodu
- Y_i – nivo pojave u tekućem periodu

$$I_i = \frac{y_i}{y_0} 100$$

4

Indeksi: Primjer

God.	Cijena	Indeks 1982=100	Indeks 1989=100
1982	121	100.0	64.7
1983	121	100.0	64.7
1984	133	109.9	71.1
1985	146	120.7	78.1
1986	162	133.9	86.6
1987	164	135.5	87.7
1988	172	142.1	92.0
1989	187	154.5	100.0
1990	197	162.8	105.3
1991	224	185.1	119.8
1992	255	210.7	136.4
1993	247	204.1	132.1
1994	238	196.7	127.3
1995	222	183.5	118.7



5

Lančani indeksi

- Lančani indeksi – indeksi sa promjenljivom bazom
- Baza se mijenja iz godine u godinu, pa su lančani indeksi odnos nivoa pojave u tekućem periodu i nivoa iz prethodnog perioda

$$L_i = \frac{y_i}{y_{i-1}} 100$$

6

Indeksi: Primjer

God.	Cijena	Indeks 1982=100	L_t
1982	121	100.0	-
1983	121	100.0	100.0
1984	133	109.9	109.9
1985	146	120.7	109.8
1986	162	133.9	110.9
1987	164	135.5	101.2
1988	172	142.1	104.9
1989	187	154.5	108.7
1990	197	162.8	105.3
1991	224	185.1	113.7
1992	255	210.7	113.8
1993	247	204.1	96.9
1994	238	196.7	96.3
1995	222	183.5	93.3

7

Vrste indeksa

- Indeksi cijena

$$I_p = \frac{P_t}{P_0} 100$$

- Indeksi količina

$$I_q = \frac{q_t}{q_0} 100$$

- Indeksi proizvodnje

$$I_{pq} = \frac{P_t q_t}{P_0 q_0} 100$$

8

PRIMJER

- Osoba posjeduje akcije u tri kompanije. U tabeli su date cijene po jednoj akciji i broj akcija koje posjeduje u 1991 i 1998 godini.

Akcija	1991 Cijena	1991 Kol.	1998 Cijena	1998 Kol
Zetatrans	\$1	30	\$2	50
Obod	\$5	15	\$4	30
EPCG	\$6	40	\$6	20

9

PRIMJER (*nastavak*)

- Izračunati prosti indeks cijena za svaku akciju. Koristiti 1991 kao bazičnu godinu (1991=100).

– Indeks je : $(2/1)(100)=200$; $(4/5)(100)=80$; i $(6/6)(100)=100$

- Izračunaj prosti indeks za količine koristeći 1991 kao bazu (1991=100).

– Indeksi su: $(50/30)(100)=166.67$; $(30/15)(100)=200$; i $(20/40)(100)=50$

10

Pozicione srednje vrijednosti

MODUS I MEDIJANA

11

Srednje vrijednosti – Modus

Pozicione srednje vrijednosti se određuju na osnovu mjesta – pozicije koju zauzimaju u seriji.

Modus je vrijednost obilježja koje u posmatranoj seriji ima najveću frekvenciju – najčešće se javlja i zato je najtipičnija vrijednost u seriji.

12

Srednje vrijednosti – Modus

Kada je u jednoj seriji samo jedna vrijednost obilježja sa najvećom frekvencijom kažemo da je unimodalna.

Ako postoje dvije ili više takvih vrijednosti, serija je bimodalna, odnosno multimodalna.

13

Modus



Modus = 16

Modus je vrijednost obilježja koja se najčešće javlja u seriji. To je vrijednost sa **najvećom frekvencijom**.

14

Modus

- Ne zavisi od članova serije
- Serija po broju modusa može biti:
 1. Unimodalna – jedinstven modus
 2. Bimodalna – dva modusa
 3. Multimodalna – više.
- Nedostatak modusa

PRIMJER: U seriji sa podacima: 34, 12, 4, 3 i 17, modus nije definisan.

15

Primjer 1

- 50 Domaćinstava imalo je sljedeće dnevne potrošnje hljeba u kg.

Hljev u kg	Broj domaćinstava	
0.5	6	
1	7	
1.5	9	
2	18	
2.5	5	
3	3	
3.5	2	
Ukupno	50	

16

Primjer 1

- 50 Domaćinstava imalo je sljedeće dnevne potrošnje hljeba u kg.
- Dakle, u 50 datih domaćinstava najčešće se troši 2 kg hljeba dnevno.

Hljev u kg	Broj domaćinstava	
0.5	6	
1	7	
1.5	9	
<u>2</u>	18	← Modus
2.5	5	
3	3	
3.5	2	
Ukupno	50	

17

Srednje vrijednosti – Modus

Za serije grupnih podataka modus nije lako uočljiv. Treba ga tražiti u intervalu sa najvećom frekvencijom, koji se naziva modalnim.

18

Modus za podatke grupisane u intervalne grupe

$$M_o = L_1 + \frac{f_2 - f_1}{(f_2 - f_1) + (f_2 - f_3)} i$$

- L_1 – donja granica klase u kojoj se nalazi modus
- f_1 – frekvencija susjedne klase sa manjim vrijednostima obilježja
- f_2 – modalna frekvencija
- f_3 - frekvencija susjedne klase sa većim vrijednostima obilježja
- i – širina grupnog intervala

19

Primjer 2

Potrošnja ulja u l	Broj domaćinstava
0,75 – 1,25	18
1,25 – 1,75	48
1,75 – 2,25	72
2,25 – 2,75	89
2,75 – 3,25	99
3,25 – 3,75	90
3,75 – 4,25	75
4,25 – 4,75	60
Σ	551

Izračunati modus

Primjer 2

Potrošnja ulja u l	Broj domaćinstava
0,75 – 1,25	18
1,25 – 1,75	48
1,75 – 2,25	72
2,25 – 2,75	89
2,75 – 3,25	99
3,25 – 3,75	90
3,75 – 4,25	75
4,25 – 4,75	60
Σ	551

$$M_o = L_1 + \frac{f_2 - f_1}{(f_2 - f_1) + (f_2 - f_3)} i$$

$$M_o = 2,75 + \frac{99 - 89}{(99 - 89) + (99 - 90)} 0,5$$

Širina intervala $i=0,5$

$$M_o = 2,75 + \frac{10}{19} 0,5 = 2,78$$

Primjer 3

Broj neispravnih proizvoda	Broj nabavki
Interval	f
10-14	2
14-18	5
18-22	5
22-26	8
26-30	14
30-34	8
34-38	4
Ukupno	46

$$L_1 = 26$$

$$f_1 = f_3 = 8$$

$$f_2 = 14$$

$$i = 4$$

$$M_o = 26 + \frac{6}{6 + 6} \cdot 4 = 28$$

22

Srednje vrijednosti – Modus

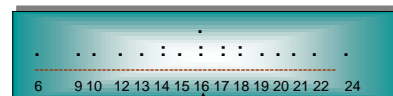
Modus se može približno izračunati ako su poznate medijana i aritmetička sredina i to kod onih distribucija frekvencije koje su nedovoljno simetrične, preko relacije:

$$M_o = 3M_e - 2\bar{X}$$

23

Srednje vrijednosti – Modus

Vrijednost modusa se može odrediti i grafičkim putem



Modus = 16

24

Srednje vrijednosti – Medijana

Medijana je ona vrijednost obilježja koja se nalazi u sredini serije uređene po veličini obilježja, odnosno to je vrijednost obilježja koja dijeli sumu svih frekvencija na dva jednaka dijela, tako da jedna polovina obuhvaćenih slučajeva ima manju, a druga polovina veću vrijednost od medijane.

25

Srednje vrijednosti – Medijana

Medijana je jednaka srednjoj vrijednosti središnjeg člana serije podataka koji su rangirani po rastućem poretku.

Ona dijeli seriju rangiranih podataka na dva jednaka dijela.

Izračunavanje medijane podrazumijeva dva koraka:

1. Rangiranje podataka od najnižeg ka najvišem.
2. Pronalaženje središnjeg člana. Vrijednost ovog člana je jednaka medijani.

26

Medijana

- **Medijana** je središnja vrijednost serije uređene po veličini. Dijeli seriju na dva jednaka dijela.
- Negrupisani podaci:

Neparan broj podataka

Paran broj podataka

$$Me = x_{\frac{n+1}{2}}$$

$$Me = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$$

27

Primjer 4

- Kontrolom mase 9 pakovanja kafe mase od 1000 grama, dobijeni su rezultati: 980, 975, 1010, 995, 1000, 1005, 998, 1002 i 1001. Odrediti medijanu.

• RJEŠENJE

Kako se ovdje radi o negrupisanim podacima i neparnim brojem podataka, moraju se prvo podaci poredati po veličini u rastući niz:

975 980 995 998 1000 1001 1002 1005 1010,
x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8 x9

Na osnovu formule dobija se:

$$Me = x_{\frac{9+1}{2}} = x_5 = 1000$$

28

Primjer 5 - Medijana

Sales Sorted_Sales

9	6
6	9
12	10
10	12
13	13
15	14
16	14
14	15
14	16
16	16
17	16
16	17
24	17
21	18
22	18
18	19
19	20
18	21
20	22
17	24

$$Me = \frac{x_{\frac{20}{2}} + x_{\frac{20}{2}+1}}{2} = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{16 + 16}{2} = 16$$

Medijana

29

Medijana – grupisani podaci bez intervalnih grupa

- Važe iste formule za paran i neparan broj podataka
- Treba izračunati kumulativne frekvencije
- Kumulante “ispod” i “iznad”
- PRIMJER 6.: Na osnovu rasporeda nastanjenih stanova prema broju lica, odrediti medijanu.

30

Rješenje

Broj lica	Broj stanova	Kumulacija (fk)	
		ispod	iznad
x	f		
1	259	259	2491
2	460	719	2232
3	478	1197	1772
4	564	1761	1294
5	282	2043	730
6	200	2243	448
7	248	2491	248
Ukupno	2491		

$$Me = x(2491+1)/2 = x1246 = 4$$

31

Primjer 6: Na osnovu rasporeda domaćinstava prema mjesečnoj potrošnji jestivog ulja, odrediti medijanu.

Mjesečna potrošnja ulja u l	Broj dom.	Kumulacija (fk)	
		ispod	iznad
x	f		
1	80	80	800
2	140	220	720
3	170	390	580
4	200	590	410
5	110	700	210
6	70	770	100
7	30	800	30
Ukupno	800		

32

Rješenje

$$Me = \frac{x_{\frac{800}{2}} + x_{\frac{800}{2}+1}}{2} = \frac{x_{400} + x_{401}}{2} = \frac{4 + 4}{2} = 4$$

- Polovina domaćinstava troši manje od 4 l ulja mjesečno, a polovina više.

33

Srednje vrijednosti – Medijana

Za serije grupisanih podataka medijana se dobija interpolacijom između donje i gornje granice intervala grupe u kojoj se nalazi medijana.

34

Medijana – podaci grupisani u intervale

$$M_e = L_1 + \frac{\frac{N}{2} - \sum f_1}{f_{Me}} \cdot i$$

- L1 – donja granica medijanskog intervala
- N – broj podataka u seriji
- $\sum f_1$ – zbir frekvencija (kumulanta) predmedijanskog intervala
- fMe – stvarna frekvencija medijanskog intervala
- i – širina grupnog intervala

35

Primjer 7

Potrošnja ulja u l	Broj domaćinstava
0,75 – 1,25	18
1,25 – 1,75	48
1,75 – 2,25	72
2,25 – 2,75	89
2,75 – 3,25	99
3,25 – 3,75	90
3,75 – 4,25	75
4,25 – 4,75	60
Σ	551

Izračunati medijanu

Potrošnja ulja u l x	Broj domaćinstava f	Kumulacija	
		Ispod	Iznad
0,75 – 1,25	18	18	551
1,25 – 1,75	48	66	533
1,75 – 2,25	72	138	485
2,25 – 2,75	89	227	413
2,75 – 3,25	99	326	324
3,25 – 3,75	90	416	225
3,75 – 4,25	75	491	135
4,25 – 4,75	60	551	60
Σ	551		

$\frac{N}{2} = \frac{551}{2} = 275,5$

Potrošnja ulja u l x	Broj domaćinstava f	Kumulacija	
		Ispod	Iznad
0,75 – 1,25	18	18	551
1,25 – 1,75	48	66	533
1,75 – 2,25	72	138	485
2,25 – 2,75	89	227	413
2,75 – 3,25	99	326	324
3,25 – 3,75	90	416	225
3,75 – 4,25	75	491	135
4,25 – 4,75	60	551	60
Σ	551		

$\frac{N}{2} = \frac{551}{2} = 275,5$

- $N/2=551/2=275,5$
- $i=0,5$

$$M_e = L_1 + \frac{\frac{N}{2} - \sum f_i}{f_{Me}} \cdot i = 2,75 + \frac{551}{99} - 227 \cdot 0,5 = 2,75 + 0,24 = 2,99$$

39

Primjer 8: Na osnovu raspodjele zarada među radnicima jednog preduzeća, odrediti medijanu.

Mjesečna zarada	Broj radnika	Kumulacija (fk)
1450.1-1550	1	1
1550.1-1650	3	4
1650.1-1750	6	10
1750.1-1850	11	21
1850.1-1950	20	41
1950.1-2050	25	66
2050.1-2150	18	84
2150.1-2250	9	93
2250.1-2350	5	98
2350.1-2450	2	100
Ukupno	100	

40

Rješenje

- $N/2=100/2=50$
- $i=100$
- Polovina radnika prima manje od 1986,1€, a polovina više od tog iznosa.

$$M_e = L_1 + \frac{\frac{N}{2} - \sum f_i}{f_{Me}} \cdot i = 1950,1 + \frac{100}{25} - 41 \cdot 100 = 1950,1 + 36 = 1986,1$$

41

Srednje vrijednosti – Medijana

Medijana se ne može odrediti kada otvoreni grupni interval sadrži više od polovine svih jedinica

42

Kvartili

- **Kvartili** su one vrijednosti u seriji koje je dijele na četvrtine.
- **Prvi kvartil** je vrijednost ispod koje se nalazi 1/4 podataka.
- **Drugi kvartil** je vrijednost ispod koje se nalazi 1/2 podataka. To je ustvari **medijana**.
- **Treći kvartil** je vrijednost ispod koje se nalaze 3/4 podataka.

43

Primjer 9 - Kvartili

Sales	Sorted Sales		$(n+1)P/100$	Kvartili
9	6			
6	9			
12	10			
10	12			
13	13	← Prvi kvartil	$(20+1)25/100=5.25$	$13 + (.25)(1) = 13.25$
15	14			
16	14			
14	15			
14	16			
16	16	← Medijana	$(20+1)50/100=10.5$	$16 + (.5)(0) = 16$
17	16			
16	17			
24	17			
21	18			
22	18	← Treći kvartil	$(20+1)75/100=15.75$	$18 + (.75)(1) = 18.75$
18	19			
19	20			
18	21			
20	22			
17	24			

44